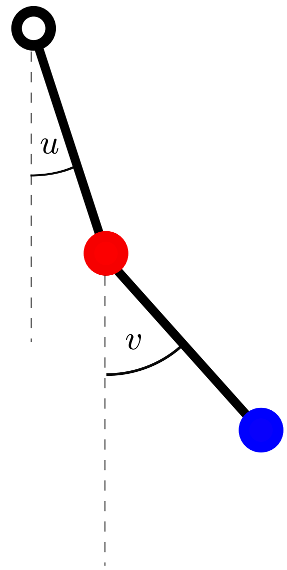
**Zadání příkladu pro cvičení z předmětu Programování prakticky**

Úloha č. 6 — 3. června 2021

Na cvičení jsme se seznámili s řešením soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Zajímavým příkladem, kde nelze vystačit s analytickým řešením a je třeba rovnice řešit numericky, je *dvojkyvadlo*. To vznikne tak, že na matematické kyvadlo (to už umíme řešit) pověsíme ještě jedno. Pro jednoduchost bude mít stejně dlouhý závěs a stejně hmotné závaží.




Místo jedné obyčejné diferenciální rovnice $\ddot{\psi}+\sin\psi = 0$ nyní budeme mít dvě navzájem neoddělitelně provázané

$$\ddot{u} = -\frac{2\sin(u-v)\left[\dot{v}^2 + \dot{u}^2\cos(u-v)\right] + \sin(u-2v) + 3\sin u}{3-\cos 2(u-v)},$$

$$\ddot{v} = \frac{2\sin(u-v)\left(2\dot{u}^2 + \dot{v}^2\cos(u-v) + 2\cos u\right)}{3-\cos 2(u-v)}.$$

Odvodit tyto rovnice se (na)učíte v teoretické mechanice. Stejně jako dříve u matematického kyvadla, i zde pro jednoduchost ve všech rovnicích uvažujeme *bezrozměrný* čas $\tau = t\sqrt{g/l}$ a derivace podle něj. Pro kontrolu přesnosti výpočtu budeme ještě potřebovat vzorec pro celkovou (bezrozměrnou) energii obou závaží:

$$E = \dot{u}^2 + \frac{1}{2}\dot{v}^2 + \dot{u}\dot{v}\cos(u-v) - 2\cos u - \cos v.$$

Připomeňme se nejprve, že pohybovou rovnici pro jednoduché matematické kyvadlo $\ddot{\phi} + \sin\phi = 0$ jsme řešili kódem

```
from scipy.integrate import solve_ivp
import math

def pohybovaRovniceKyvadla(t,U):
  phi   = U[0]
  omega = U[1]
  return (omega, -math.sin(phi) )

tFinal  = 30

Y0 = (3,0)      # počáteční výchylka a rychlost

reseni = solve_ivp(pohybovaRovniceKyvadla, (0,tFinal), Y0, rtol=1e-9, atol=1e-9)

print("V čase t=",tFinal," je výchylka kyvadla φ=",reseni.y[0,-1])
```

(Rozmyslete, proč je poslední výraz `reseni.y[0,-1]`).

Snadno zkontrolujeme, že numerická metoda poměrně přesně zachovává energii

```
def energieKyvadla(U):
  phi = U[0]
  omega = U[1]
  return 1/2*omega**2 - math.cos(phi)

print(energieKyvadla(reseni.y[:,0]))
print(energieKyvadla(reseni.y[:,-1]))
```

Změnou parametru `rtol` to lze zhoršit nebo i poněkud vylepšit (vyzkoušejte).

Klíčovou vlastností newtonovské mechaniky je schopnost předpovědět chování systému. Ukazuje se ale, že některé systémy se tomu vzpírají tím, že výsledný stav se naprosto změní i při velmi malé změně počátečních podmínek. Klasickým modelem takového systému je právě dvojkyvadlo.

Následující body popisují, jak máte dospět k funkci, která vrátí výchylky $u, v$ v čase $t > 0$ pro dvojkyvadlo vypuštěné z klidu s počátečními hodnotami $u_0, v_0 \in (-\pi, \pi))$ a poté znázornit chování dvojkyvadla v tomto oboru počátečních podmínek.

**1.** Napište funkci `pohybovaRovnice2Kyvadla` a vyzkoušejte, že vrací správné hodnoty:

```
print( pohybovaRovnice2Kyvadla(1,(2,3,4,5) ) )

(4, 5, 15.554838780738537, -22.00897102562641)
```

**2.** Napište funkci `energie2Kyvadla` a vyskoušejte, že vrací rozumné hodnoty:

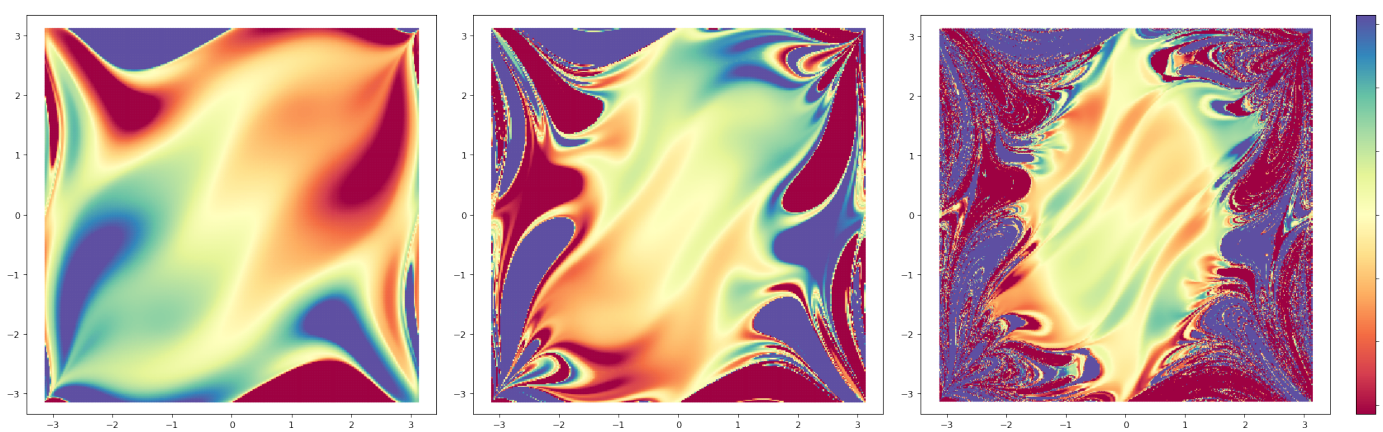
```
print( energie2Kyvadla( (2,3,4,5) )  )

41.128332287057525
```

**3.** Napište funkci `stav2KyvadlaVypustenehoZ(t,tu0,v0)`, která za použití vhodného numerického řešení uvedené soustavy diferenciálních rovnic nalezne výsledné $u(t), v(t), \dot{u}(t), \dot{v}(t)$ v čase $t > 0$ pro dvoj-kyvadlo vypuštěné v $t = 0$ z $u_0, v_0$. Ověřte, že vám pro parametry `rtol=1e-12, atol=1e-12` u funkce `scipy.integrate.solve_ivp` vyjde

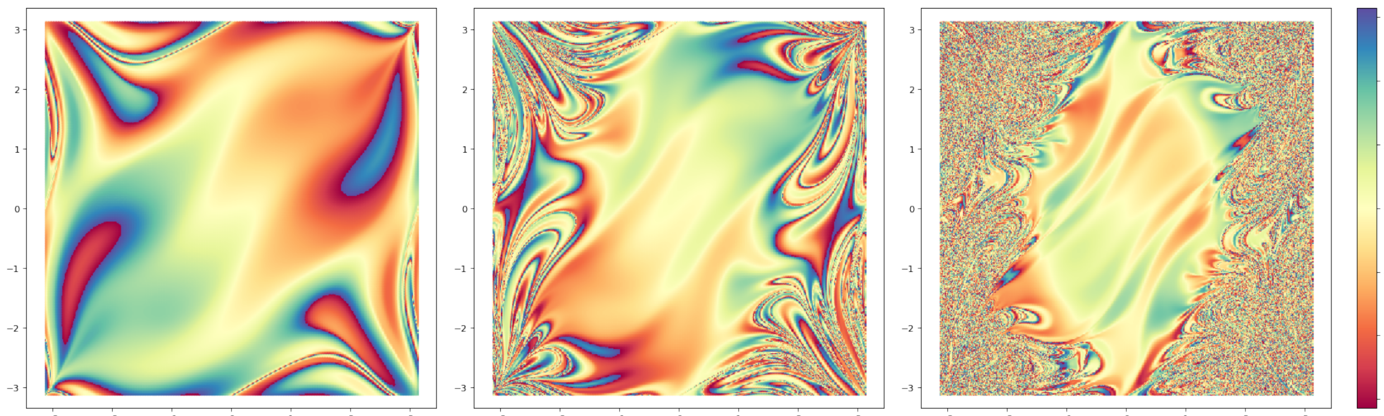
```
(u00,v00) = (1,2)
tKonc     = 10

zacatek = (u00,v00,0,0)
konec   = stav2KyvadlaVypustenehoZ(tKonc, u00,v00)
print( konec )
print( energie2Kyvadla(zacatek) )
print( energie2Kyvadla(konec) )

[ 1.12203348  0.9537164  -0.72450775 -0.29773826]
-0.6644577751891372
-0.6644577751938292
```

**4.** Podobně, jako jsme to dělali pro newtonovské fraktály v komplexní rovině na cvičení, pokryjte čtverec $u_0, v_0 \in (-\pi, \pi))$ spoustou bodů a vykreslete barvou (třeba za použití palety `Spectral` známé z minulé domácí úlohy), jakou hodnotu bude mít úhel $v(t = t_1)$, kde $t_1 = 30$. Protože výpočet bude poměrně náročný, zkuste zvětšit hodnoty `atol, rtol` na cca $10^{-4}$.

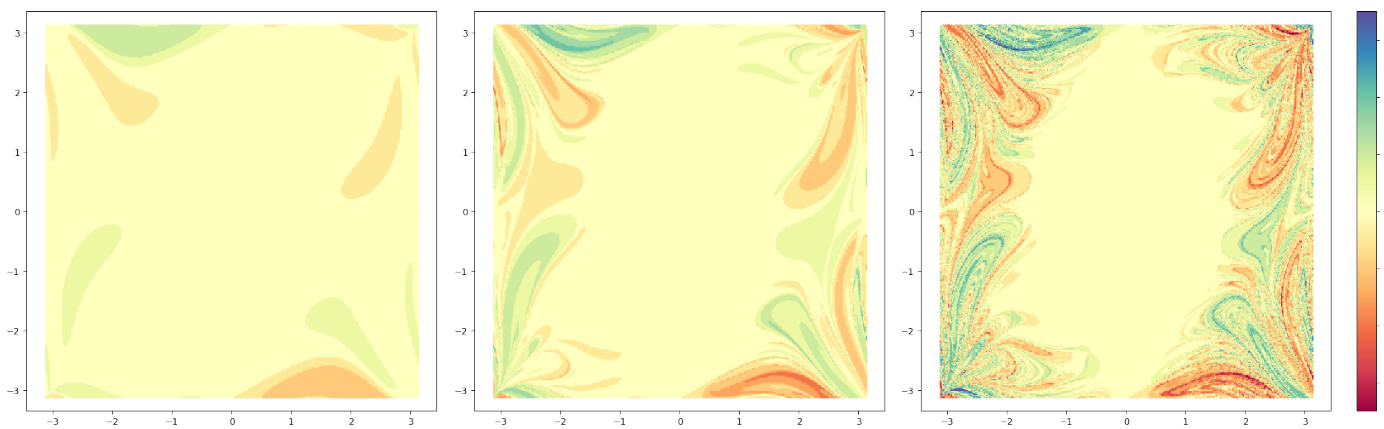
**5.** Jako řešení úlohy pošlete emailem odkaz na Jupyterový sešit (stačí odkaz na sdílený read-only dokument), kde se bude malovat obrázek podobný tomu z Obr. 2 pro $t_{\mathrm{Konc}} = 30$. Další obrázky slouží jako inspirace. Více samozřejmě na `en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum`.



Obr. 2. Hodnota úhlu $v$ pro časy $t = 5, 10, 20$ znázorněná barvou. Na vodorvné ose je úhel $u$ a na svislé úhel $v$ z nichž je v klidu dvojkyvadlo vypuštěno v čase $t = 0$. Vy máte nalézt obrázek pro $t = 30$. Obrázek ilustruje vznik oblasti počátečních dat, kde není možno rozhodnout, jaké hodnoty bude nabývat v delších časech stav systému (třeba právě úhel $v$).




Obr. 3. Hodnota úhlu $v - 2k\pi$ pro časy $t = 5, 10, 20$ znázorněná barvou. Hodnota $k$ se volí tak, aby $v - 2k\pi \in (-\pi, \pi)$.




Obr. 4. Počet otočení spodního závaží kolem svého závěsu. ( tedy $v \in (-\pi, \pi) \to n_v = 0$, $v \in (\pi, 3\pi) \to n_v = 1$, atd.)